

L'educació (matemàtica) és una arma de construcció massiva¹

Anton Aubanell

MMACA, Grup Cúbic de la UB

Joan Jareño

Professor jubilat CRAMAT

Resum

Des de fa molt de temps, el nostre professorat de matemàtiques de totes les etapes educatives no universitàries està compromès en un procés de millora: canviant enfocaments generals, ajustant els continguts, enriquint metodologies, atenent perfils d'alumnes diversos... Són una prova d'aquest esforç les nombroses activitats de formació continuada i de millora professional (en modalitats diverses i, en molts casos, amb una gran participació) que es porten a terme, impulsades tant des de l'Administració com des de les associacions que tenim a Catalunya en el camp de l'educació matemàtica i que encapçala la FEEMCAT (Federació d'Entitats per a l'Ensenyament de les Matemàtiques a Catalunya). Entre aquestes activitats destaquen els congressos catalans d'Educació Matemàtica, C²EM, del 2016 (Barcelona) i del 2020 (Reus-Tarragona). En redactar aquestes pàgines s'han tingut en compte les conclusions del primer, els reptes formulats en el segon i les línies d'impuls treballades entre els dos.

Abstract

For a long time, mathematics teachers in all non-university educational stages have been engaged in a process of improvement: changing general approaches, adapting content, enhancing methodologies, addressing different student profiles, etc. Proof of this endeavour is found in the numerous activities and events dedicated to continuing professional development and improvement (in various modalities, and often with great participation) promoted both by the government and by associations in Catalonia specialised in mathematics education, headed by the Federació d'Entitats per a l'Ensenyament de les Matemàtiques a Catalunya (FEEMCAT, Federation of Entities for the Teaching of Mathematics in Catalonia). Amongst those events, two editions of the Catalan Congresses on Mathematical Education, C²EM, held in 2016 (Barcelona) and 2020 (Reus-Tarragona), stand out. In this paper, the conclusions of the former, the challenges outlined in the latter, and the initiatives developed by both are considered.

1. El present escrit està basat en la conferència amb el mateix títol (adaptació matemàtica d'una coneguda frase sovint atribuïda a Marjane Satrapi) que els autors van impartir en el CESIRE-CREAMAT el dia 23 de febrer de 2023 en ocasió de la presentació dels nodes d'impuls matemàtic (NIM). La conferència es pot visionar a <https://ja.cat/hmCII>.

1. Per què ensenyem matemàtiques? La guineu i l'àliga

A més del creixement personal, un dels objectius generals de l'educació és fer de pont entre l'individu i la cultura de la societat a la qual pertany. I no s'espera que només s'atenguin els aspectes transmissius d'aquesta cultura (fer-nos receptors-coneixedors). L'objectiu va més enllà. Es pretén que el coneixement que s'obtingui sigui reflexiu i, a la vegada, actiu, transformador: que possibiliti el desenvolupament d'una capacitat crítica i l'assoliment d'unes capacitats que permetin fer aportacions enriquidores per al'evolució i el progrés de la pròpia cultura.

Sense entrar en definicions precises, podem entendre la cultura com un conjunt compartit de sabers, de formes de fer i pensar, i de valors. Sovint el terme «cultura» té cognoms: cultura general, cultura científica, cultura artística... Fins i tot de vegades, cognoms molt específics: cultura de sostenibilitat, cultura de gènere... Lamentablement, no és tan freqüent sentir a parlar de *cultura matemàtica*. Malgrat que el terme «enculturació matemàtica» va aparèixer amb una certa força als anys norantadel segle passat, per exemple, amb Alan Bishop,² encara s'ha d'estendre més la idea que part de la nostra feina com a docents és facilitar l'entrada de l'alumnat al món de la cultura matemàtica. Si assumim aquest objectiu cultural, assumim també, en conseqüència, el de decidir quins sabers, quines formes de pensar i quins valors volem conrear en el nostre alumnat. No és el lloc de fer una llista exhaustiva, però podem destacar-ne alguns.

Entre els valors relacionats amb la matemàtica podem esmentar, per exemple, l'estima pel repte, la constància en la resolució d'un problema, l'actitud d'interrogació contínua, el rigor, la consciència del pes de l'argumentació lògica (del racionalisme), el reconeixement de la importància de la quantificació i la mesura, el conreu de la mirada matemàtica, l'apreciació de la seva bellesa... Bishop.³ (1988) afirmava que «una educació matemàtica no és educació si no contribueix gens al desenvolupament de valors». I, anant més enllà, es demanava si «potser aquesta és una diferència crucial entre formació matemàtica i educació matemàtica».

Sobre els sabers matemàtics, hem de fer algunes reflexions prèvies. En primer lloc, usualment parlem de sabers de dos tipus: conceptes i procediments. En l'antiga matemàtica grega, una matemàtica fundacional, segons la manera que entenem les matemàtiques encara avui dia, diferenciaven entre *mathema*, referida a la ciència i el coneixement, i *logística*, de caràcter operatiu. Ens podem preguntar sobre l'equilibri de la presència de totes dues a les nostres aules. Segurament veurem que la *logística* encara ocupa una quantitat excessiva del temps escolar. El matemàtic John Allen Paulos.⁴ declarava en una entrevista: «No té cap sentit educar a ningú per competir amb una calculadora de cinc dòlars que, a més, sempre guanyarà». En la nostra defensa de l'educació en la cultura matemàtica hem d'ampliar els sabers més clàssics que acostumen a aparèixer als currículums o llibres de text. Cal considerar també

2. Bishop, Alan J. (1999). *Enculturación matemática: La educación matemática desde una perspectiva cultural*. Barcelona: Paidós.

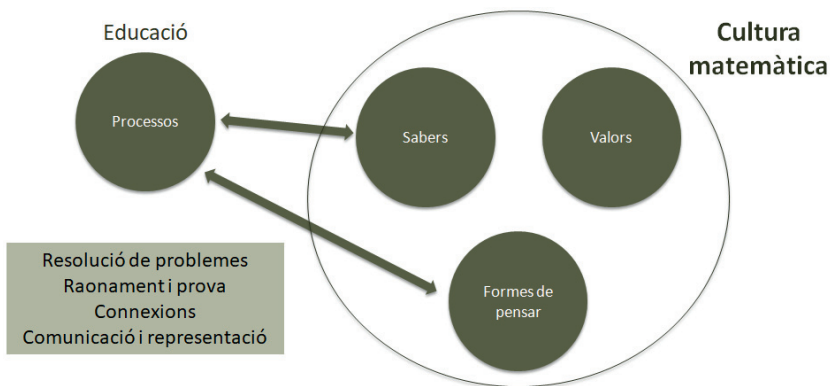
3. Bishop, Alan J. (1988). «Mathematics education in its cultural context». *Educational Studies in Mathematics*, 19/2, 179-191.

4. Entrevista al diari *El País* (17/5/2000): <https://ja.cat/sUN9l>.

altres sabers, com els relatius a la història, la presència de la matemàtica en l'entorn, la seva utilitat, les seves característiques internes (quin paper tenen les definicions, els axiomes, les conjectures, les demostracions, els teoremes...). Després tornarem a parlar sobre aquesta doble visió de la matemàtica.

El tercer conjunt de components d'una cultura que hem destacat és el de les formes de pensar i de fer. Cal educar en el pensament matemàtic. Per exemple, en les estratègies de resolució de problemes, en l'aplicació del raonament lògic (inductiu i deductiu), en la cerca de patrons (demanar-nos: què és igual?, què és diferent?, què es manté?, què varia?, com?), en l'aprenentatge de la modelització de situacions...

Un cop plantejat el *què* cultural que cal incorporar en l'educació matemàtica, toca decidir el *com*. Sembla clar que el *com* ha de tenir un fort component constructiu per part del mateix alumnat, que ha de partir de la seva acció matemàtica. També tenim clar que la línia didàctica per tractar a l'aula, tant els sabers com el pensament matemàtic, passa per l'atenció als processos: resolució de problemes, raonament i prova, comunicació, representació i establiment de connexions. Aquests processos ens ajudaran tant a incorporar els sabers com a formar en el pensament matemàtic.



No voldríem concloure aquest apartat sense destacar un aspecte de la matemàtica i, en conseqüència de l'educació matemàtica, que ens sembla cabdal. Mogens Niss, matemàtic i especialista en educació danès, afirmava que «Les matemàtiques a l'escola es converteixen no tan sols en capacitat tecnològica a les fàbriques, sinó també en qualitat de les democràcies».⁵ En poques paraules s'apunten els dos tipus d'aportació que, fonamentalment, l'educació matemàtica fa a la formació dels ciutadans: donar eines potents que els seran útils per entendre i interactuar amb el món que els envolta i posar al seu abast un formidable cos de coneixements, sòlid i coherent, que educa el raonament i posa de manifest la necessitat de la fonamentació racional de les idees. Es tracta de dos aspectes de la matemàtica que ens conviden a comparar-la amb dos animals: la guineu i l'àliga.

5. Entrevista a «La Contra» de *La Vanguardia*(20/5/2005).

- La guineu coneix bé el seu entorn, sap on trobar aigua i menjar, sap on fer un cau. La matemàtica és guineu quan mostra el seu aspecte més instrumental: la seva aplicació, la seva capacitat per construir models...
- L'àliga s'eleva cap al cel tal vegada pel simple gust de contemplar paisatges amplísimos, tal vegada per augmentar la seva potència i precisió quan es llança sobre una presa. La matemàtica és àliga quan, amb les potents ales de la lògica, s'eleva cap al cel de l'abstracció i desenvolupa idees que potser seran d'enorme potència per resoldre un problema concret.



L'educació matemàtica hauria de buscar oportunitats per anar projectant aquestes dues cares que són indissociables i que Lluís A. Santaló.⁶ posava de manifest amb paraules molt belles: «Les seves aplicacions són essencials per a moure'ns en la vida i les seves concepcions alimenten allò més pur de l'esperit».

Des d'aquesta perspectiva són benvinguts els projectes STEAM (de l'anglès *science, technology, engineering, arts i mathematics*). Però hauríem d'evitar una certa invisibilitat o un reduccionisme merament instrumental o mecanicista de la matemàtica, de la qual hauríem de tenir cura que també es visualitzessin la bellesa intrínseca, l'estructura global i la connexió de les seves idees, els aspectes abstractes i les bases del seu valuós i potent llenguatge formal. No hauríem d'oblidar l'àliga que pot aportar ales per volar lluny.

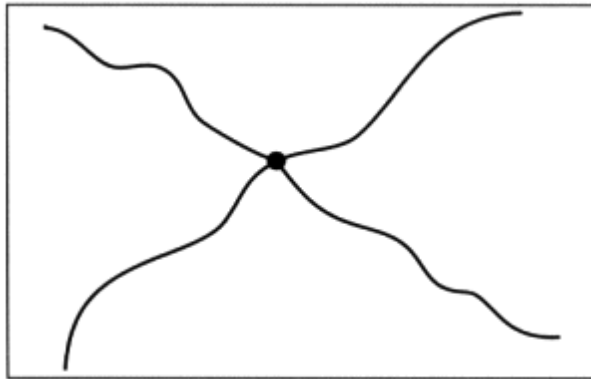
2. Els processos

No entrarem, per qüestions d'espai, en l'explicació dels processos. Però ens agradaria posar només un exemple d'un problema per mostrar les seves possibilitats per activar sabers i pensament.

El problema és el següent:⁷ «A Moçambic, per delimitar el terreny rectangular que ha d'ocupar una cabana, s'utilitzen quatre cordes de la mateixa longitud lligades per un dels seus extrems».

6. Santaló, Lluís A. (1975). *L'educació matemàtica avui*. Barcelona: Teide.

7. «Delimitant el terreny per fer les cases a Moçambic». *Blog del Calaix +ie*: <https://ja.cat/3NNLE>.

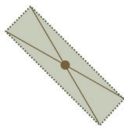


Per tenir un problema no només hem de tenir una situació, sinó, com a mínim, una pregunta. Mirem algunes de les que ens podem fer:

- Com hem d'utilitzar les cordes per obtenir un rectangle?
- Com són els perímetres i les àrees dels diferents rectangles que podem obtenir? Iguals? Diferents? Si és així, com varien? Màxims? Mínims?
- I si augmentem les longituds de les cordes? Com creixen els perímetres i les àrees dels rectangles en comparació amb el cas anterior?
- I si utilitzem cordes de mides diferents? Quins polígons obtindrem?

Els sabers implicats apareixeran o no segons les preguntes investigades, i els processos associats dependran molt de la gestió de l'aula. A la taula següent en recollim alguns.

[P: resolució de problemes; R: raonament i prova; Cn: connexions; Re: representació; Co: comunicació]

Problema		
Sabers	<ul style="list-style-type: none"> • Longitud, angles, mesura • Característiques del rectangle • Perímetres i àrees del rectangle • Funcions de diferents tipus (lineals, quadràtiques, trigonomètriques...) • Classificació de quadrilàters 	
Processos	P	<ul style="list-style-type: none"> • Estratègies de resolució com particularitzar, generalitzar... • Ús de relacions geomètriques i d'eines trigonomètriques • Comprovació de resultats i valoració de la seva plausibilitat • Formulació de noves preguntes
	R	<ul style="list-style-type: none"> • Elaboració i comprovació de conjeitures • Justificació de les descobertes
	Cn	<ul style="list-style-type: none"> • Relacions entre perímetres i àrees, diagonals, angles... • Amb disseny i construcció (etnomatemàtica)

Re	<ul style="list-style-type: none"> • Experimentació amb materials i/o GeoGebra, <i>role-play</i>... • Esquemes • Taules • Gràfiques de funcions
Co	<ul style="list-style-type: none"> • Utilització precisa del llenguatge matemàtic per descriure les idees geomètriques que es posen en joc. • Explicació de procediments i conclusions (oralment, per escrit, amb murals...) per compartir i enriquir coneixements i deixar constància de la feina feta.

3. 7,4 accions

Tota acció necessita un actor que la porti a terme. En aquestes propostes diferenciarem principalment tres responsables per fer-les realitat: l'Administració educativa (AE), les universitats (UN) i els mateixos docents (DO). Cal aclarir, però, que mai entenem que hagin de ser actors independents: és imprescindible una col·laboració i, fins i tot, complicitat entre tots tres.

1. Emmarcar. Cal un marc administratiu que afavoreixi millores en l'educació matemàtica (AE)

Una de les responsabilitats clares de l'Administració educativa és l'elaboració del currículum obligatori. Però cal que aquest estigui d'acord amb els temps en què vivim i estigui actualitzat en les línies confirmades per la recerca educativa i les propostes de la comunitat matemàtica. Ha de ser un currículum dialogat amb interlocutors solvents. A Catalunya ja s'ha actuat en aquesta línia, fins al punt que el currículum català ha estat un dels inspiradors del de la Llei orgànica 3/2020, de 29 de desembre, per la qual es modifica la Llei orgànica 2/2006, de 3 de maig, d'educació (LOMLOE). També és cert que aquests currículums, per raons purament polítiques, no estan tenint prou estabilitat. Entre el 2007 i el 2022 hem vist tres currículums diferents. Encara que podem seguir una línia evolutiva de l'un a l'altre, cal reconèixer també que un currículum no només es publica, sinó que s'ha d'estendre, entendre i mantenir un temps suficient. I tot ha d'anar acompanyat de plans formatius extensius.

Una altra funció administrativa és l'assignació d'un temps escolar específic i suficient a les matemàtiques. Ni el currículum més perfecte té sentit si no se li assignen un temps i uns mitjans que permetin desenvolupar-lo. El temps, en educació, és un bé limitat: les bones didàctiques requereixen temps. I la manca de temps pot comprometre els millors propòsits curriculars. El marc horari actual permet unes modificacions horàries que han arribat a reduir al mínim, en alguns centres, el temps específic de l'àrea, sense estar sempre prou compensat per com es tracten les matemàtiques en l'espai dels treballs de caràcter interdisciplinari.

Per altra banda, sabem, basant-nos en les evidències de la recerca educativa, que és cabdal que els centres tinguin una línia metodològica comuna, compartida. I que aquesta línia es mantingui entre les diferents etapes educatives. Però això no cau del cel: cal donar temps als centres per treballar conjuntament aquestes línies. Una ajuda important a la creació d'aquesta línia metodològica comuna és el reconeixement, a l'educació primària, de persones referents de centre que tinguin, entre les seves responsabilitats, la coordinació dels diferents nivells. A l'educació secundària hi ha especialistes i departaments que donen el marc

per a aquesta possible coordinació. Però als centres de primària aquesta figura de l'especialista és actualment inexistent.

En la mateixa línia anterior és important que l'Administració també promogui i doni suport a l'existència de xarxes territorials que impulsin la millora de l'educació matemàtica. En aquest sentit, actualment s'estan fent alguns petits passos, com els NIM (nodes d'impuls matemàtic) organitzats pel CREAMAT, Centre de Recursos per Ensenyar i Aprendre Matemàtiques, i els centres de recursos pedagògics (CRP).⁸

2. Formar. Cal cuidar la formació permanent i la formació inicial (DO-AE-UN)

L'ofici d'ensenyar —i, en concret, ensenyar matemàtiques— és complex. Necessàriament, requereix una actitud, una sensibilitat, una voluntat que, en definitiva, és el que ens fa entrar cada dia a l'aula amb una il·lusió renovada. Però això no és suficient.

Cal disposar d'un coneixement matemàtic sòlid: no tan sols dels continguts que cal tractar a classe, sinó de continguts més avançats que ofereixin una perspectiva més àmplia de la matèria, incloent-hi aspectes de cultura matemàtica com, per exemple, els històrics. No disposar d'aquesta base pot provocar que el docent se senti incòmode davant de la classe, que no tingui prou clar cap a on vol avançar i com; que no pugui treure tot el profit docent de les situacions imprevistes que sorgeixen a classe, de la contingència.

Cal tenir un bon coneixement didàctic que ajudi a interactuar positivament amb els alumnes, a entendre els seus processos d'aprenentatge i a disposar d'una àmplia base de recursos de tipus diversos per a l'ensenyament de la matemàtica: materials, tecnològics, comunicatius, de dinàmica de grups... No disposar d'aquest bagatge compromet la possibilitat de fer canvis metodològics profunds, efectius i duradors.

Aquests coneixements s'han d'adquirir, sòlidament, en la formació inicial de mestres i professors i, inexcusablement, s'han d'anar actualitzant al llarg de tota la vida professional.

En la formació inicial crida l'atenció el contrast entre l'èmfasi que es posa en la formació dels mestres d'educació infantil i primària i el que es posa en la formació del professorat d'educació secundària:

En la formació inicial de mestres es treballen molt els aspectes pedagògics, però no es dedica prou atenció al coneixement matemàtic a través de l'experiència directa de «fer matemàtiques». En aquest sentit, seria important recuperar l'especialitat de matemàtiques en les facultats d'Educació.

Si ens referim a l'educació secundària, hem de reconèixer que tenim facultats amb mencions, dobles graus, itineraris específics de matemàtiques i altres disciplines, però no n'hi ha cap de matemàtiques i educació. Hi ha joves que desitgen fer de l'educació matemàtica la seva professió i el nostre sistema els necessita. Ens podem permetre que la seva disposició i

8. NIM (Web Creamat): <https://ja.cat/v5yUV>.

aptitud i la necessitat social no es trobin? Actualment la formació inicial del professorat de secundària passa per un màster que té un cert marge de millora (quant a la durada, el model i l'extensió de les pràctiques). Tant de bo, algun dia, en les nostres universitats, hi hagi un grau específic d'educació matemàtica per formar professorat de secundària, amb una sòlida preparació matemàtica i didàctica. I tant de bo hi hagi un procediment d'incorporació a la professió docent cada vegada amb més acompanyament i suport.

Totes les professions, i especialment les que actuen en camps d'evolució ràpida, com ho és l'educació, requereixen un procés continuat de formació que és garantia de qualitat i motor d'innovació. Des de l'Administració educativa cal promoure i acompanyar els processos de millora a través de models de formació permanent propers a l'aula, territorialitzats, enllaçats en xarxa... En particular, els canvis substancials en el currículum haurien d'anar acompanyats d'una formació específica, prescriptiva i generalitzada.

3. Escoltar per aprendre'n. Fent xarxa guanyem qualitat, bon fer, ofici (DO-AE-UN)

Cada docent ha de cercar els seus referents per anar trobant, dins de la línia general del centre, el seu propi estil: referents viscuts com a alumne, companys de feina docent, adoptats a partir de lectures, formacions...



Però no estem sols. Hem d'assumir una cultura de compartir per créixer professionalment i contribuir al creixement dels altres. Cal donar valor al fet de crear xarxa i al fibrat associacionista. Aquest fibrat, en l'àmbit de les matemàtiques, és molt ric i no té parangó amb el d'altres àmbits educatius.

En un altre camp, l'Administració també ha d'escoltar. I pot fer-ho tenint la FEEMCAT, per exemple i entre altres, com un dels interlocutors més potents. Per aconseguir-ho també hauria de ser objectiu de la FEEMCAT, a més del seu propi creixement pel que fa a associacions i accions, adreçar-se a l'Administració amb tota la força possible i des de l'autoritat que donen la quantitat de persones associades, l'abast territorial i la diversitat, la repercussió i qualitat del seu treball. També és important que l'Administració doni suport a aquestes accions (de la FEEM-

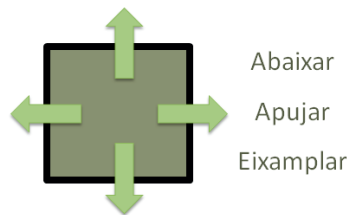
CAT o d'altres grups, associacions o institucions), tant a les que ajudin a escoltar-se entre docents (jornades, congressos...), com a les de dinamització de l'alumnat (Proves Cangur, Fem Matemàtiques, Estalmat, Anem x + Matemàtiques, MMACA i un llarg etcètera).

I encara ens agradaria afegir un altre aspecte en aquest punt. Cal que els resultats de la recerca educativa arribin als centres. Els ponts que connecten recerca i pràctica són encara força escassos i febles. Això seria una millora perals dos camps, perquè un pont és bidireccional i així es retroalimentarien. La universitat té un paper important en aquest terreny. L'escola vol contribuir a construir una societat del coneixement, però a vegades té dificultats a l'hora d'usar el coneixement per a la seva pròpia millora.

4. Enriquir. Processos i millora d'activitats (DO)

És important ensenyar matemàtiques a través d'activitats riques, de situacions d'aprenentatge rellevants i matemàticament significatives. Hi ha criteris que ens poden ajudar a enriquir activitats i que hauríem de tenir sempre presents:

1. Intentar que les activitats que portem a classe siguin de terra baix (fàcils d'accedir-hi, no excloents), de sostre alt (permeten avançar molt, no limiten) i d'espais amples (per permetre el progrés des de diferents estils d'aprenentatge). Haurem de conjugar més i reassignar els verbs *abaixar*, *apujar* i *eixamplar*.



2. Donar als processos la importància que tenen en l'accés als sabers i al pensament matemàtic. Orienten metodològicament són palanques d'enriquiment d'activitats:
 - La resolució de problemes ha d'estar al centre de l'educació matemàtica. No es tracta tan sols d'ensenyar per resoldre problemes i d'ensenyar sobre la resolució de problemes, sinó que cal ensenyar a través de la resolució de problemes rics, matemàticament rellevants, ben contextualitzats... Els bons problemes, ben treballats, són grans constructors de coneixement matemàtic!
 - El raonament hauria d'estar sempre present en l'educació matemàtica transmetent implícitament o explícitament el fet que és el que dona solidesa al cos de les matemàtiques. Els «...per què?» i els «i si...?» són excel·lents invitacions a raonar.
 - Les connexions són un dels aspectes més seductors de la matemàtica en dos sentits:
 - Les connexions internes trenquen les fronteres entre els blocs temàtics clàssics perquè mostren la coherència interna, la unitat del coneixement matemàtic. Cada connexió és una oportunitat didàctica, especialment si és amb elements geomètrics que ofereixen possibilitats de visualització.

- Les connexions externes ens ajuden a veure la matemàtica que hi ha en el que ens envolta, a través de la seva presència o de la seva aplicació. Són oportunitats per apropar-nos als models matemàtics, per discutir sobre l'exactitud i l'aproximació... perquè ja no sigui necessària la pregunta «...i això per a què serveix?».
- La comunicació i la representació ens conviden a donar importància a l'expressió de les idees amb paraules, amb símbols, amb gràfics, amb taules, amb esquemes... No tan sols per compartir idees matemàtiques amb altres persones (compartint construïm coneixement), sinó també per millorar la mateixa comprensió d'aquestes idees (ordenant conceptes i descobrint relacions).

5. Escollir. Cal triar i gestionar bé les activitats (D0-AE)

En un punt anterior hem parlat de la necessitat d'escoltar i buscar els nostres referents. En aquest apartat hi afegim la de conèixer i explorar els bancs d'activitats. Actualment tenim la sort, gràcies a les noves tecnologies de la informació, de poder accedir fàcilment a una gran quantitat de propostes educatives. Només per esmentar algunes fonts, tenim webs com les de NRIC, CREAMAT, Banc de Recursos del Fem Matemàtiques, ARC, PuntMat... Però cal tenir criteris d'elecció: personals i generals. Per exemple, la riquesa de l'activitat. En el document de la Comissió d'Impuls de les Conclusions del C²EM sobre «activitats de referència» (2018) es planteja la llista de criteris següent, que ens pot ser orientadora sobre com ha de ser l'activitat: accessible per a l'alumnat, significativa, matemàticament rellevant, activadora del pensament matemàtic, extensiva, replicable, objecte de múltiples enfocaments i representacions, i fomentadora de la col·laboració i la discussió en un marc de reflexió.

En aquest epígraf també voldríem destacar que, en les nostres tries, hem d'evitar donar una visió reduccionista de les matemàtiques. Per exemple, si hem d'exercitar alguna pràctica, no cal limitar-se a tasques purament reproductives, orientades a l'automatització, sinó que podem trobar variants que, a més, convidin a fer alguna mena de reflexió o descoberta paral·lela, el que es coneix com a «pràctiques productives». Per exemple, no és el mateix proposar una llista de restes que demanar quantes restes diferents es poden fer a partir de quatre números concrets, operació que pot portar a la formulació de tot un conjunt de preguntes noves (quin és el resultat més gran, quin és el més petit, quants resultats diferents hi ha...). Aquesta visió reduccionista pot aparèixer «perillosament» en un altre terreny: en molts treballs de caràcter interdisciplinari. Si no s'aprenen matemàtiques noves i només ens limitem a fer càlculs reproductius, més o menys complexos, o gràfics estadístics dels més usuals, només estem potenciant una visió empobrida de la instrumentalitat de les matemàtiques.

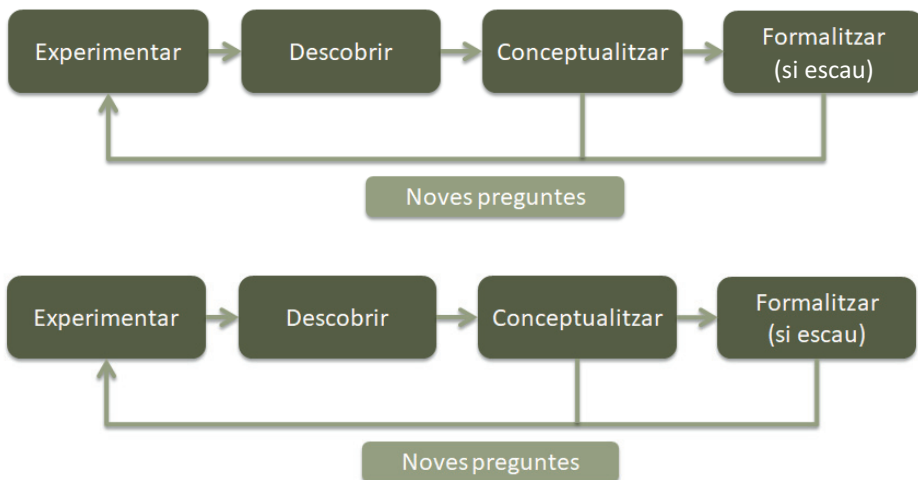
Però quan parlem d'escollir, no ens referim només a la tria d'activitats. Hi ha tot un conjunt de decisions per prendre referides a com farem les activitats a l'aula: quins materials utilitzarem?, què farem individualment?, què farem en grup?, com ho farem?... A més d'aquests aspectes, és també bo preveure com seran les nostres preguntes i intervencions, com intentarem guiar el desenvolupament de l'activitat cap als objectius que ens hem marcat. També sabem que sorgiran contingències i que haurem de parar atenció en les que puguin ser interessants. Fins i tot caldrà recollir-les per incorporar-les al nostre llistat de possibles intervencions futures si repetim l'activitat. De fet, es tracta d'anar construint de mica en mica el nostre propi banc de recursos, de recollir el que sigui educativament interessant i proper a la

nostra manera de fer.

Ens acabem de donar molta feina com a docents. Quin acompanyament ens pot donar l'Administració? La creació i difusió de bancs de recursos, facilitar l'accés a activitats diversificadament modelitzadores, la creació de xarxes per compartir materials entre iguals... També en té, de feina!

6. Cal experimentar (DO)

Estem convençuts que l'educació matemàtica ha de tenir un fort component d'experimentació (amb materials manipulables, amb *role-plays*, amb jocs, amb aplicacions de geometria dinàmica com el GeoGebra, amb fulls de càlcul, amb entorns de programació com Snap! o Scratch, fins i tot amb paper i llapis...). Henri Poincaré afirmava: «Només hi ha dos mètodes per a ensenyar fraccions: tallar, encara que sigui mentalment, un pastís, o fer-ho amb una poma. Amb qualsevol altre mètode d'ensenyament els escolars prefereixen sumar numeradors amb numeradors i denominadors amb denominadors».⁹ L'experiència no s'oposa a l'abstracció, sinó que pot ser un dels camins més directes per arribar-hi. El físic i filòsof austríac Ernst Mach deia que «la manera més eficaç de pertorbar el procés d'abstracció consisteix a abraçar-lo abans d'hora».¹⁰ Les activitats d'experimentació a classe de matemàtiques no són simples anècdotes, ni trivialitzen; al contrari, permeten treballar continguts avançats conjecturant, explorant, descobrint, conceptualitzant (posant paraules als processos realitzats o a les idees descobertes) i, si cal, demostrant i formalitzant.



Les experiències poden respondre a diverses intencions didàctiques. Per exemple, són útils per:

9. Citat per Arnold, Vladimir I. (1998). «Models matemàtics durs i models matemàtics tous». *Butlletí de la Societat Catalana de Matemàtiques*, 13/1,7-26.

10. Citat per Sigmund, Karl (2023). *El sueño del círculo de Viena*. Barcelona: Shackleton Books.

- **Motivar:** la corda de dotze nusos que s'emprava a l'antic Egipte per construir angles rectes.
- **Simular:** la màquina de Galton per simular la distribució binomial i la campana de Gauss.
- **Construir:** fer un triangle isòsceles plegant paper o traçar còniques amb fils i regles.
- **Demostrar:** justificar la paritat dels resultats de les sumes de parells i senars amb cubets encaixables.
- **Mostrar:** observar la coincidència de la suma dels angles de triangles retallant els angles de diferents triangles fets en paper i posant-los adjacents.
- **Plantejar i resoldre problemes:** establir patrons en el nombre de cubets encaixables que formen una successió de figures policúbiques construïdes amb un determinat criteri.
- **Visualitzar:** les mediatrïus en diagrames de Voronoi aproximats mitjançant Lacasitos i aigua.
- **Aplicar:** utilitzar el teorema de Thales per entendre la reducció que es produeix en dibuixar el contorn d'una cara sobre un mirall.

La importància de l'experimentació en l'ensenyament de les matemàtiques es recollia en el repte 5 del C²EM 2020: «Potenciarem la creació de laboratoris de matemàtiques als nostres centres considerant-los un element important en la creació d'ambients propicis per a l'experimentació».

7. Respectar. Tothom pot fer matemàtiques (D0)

Aquest terme, «respectar», referit a l'alumnat, va molt més enllà del respecte a la persona, a la seva forma de ser i a les seves creences. També va més enllà del respecte al seu ritme d'aprenentatge, que és evident que no és el mateix per a tots els alumnes. Una de les mostres més importants de respecte enversells és la confiança en les seves possibilitats. Sovint, sense adonar-nos-en, som els mateixos docents els que posem els límits del que poden fer i del que no. Subestimem les seves capacitats. Un exemple flagrant és que sovint, quan un grup d'alumnes té dificultats, se'ns suggereix (normalment des d'algun estament extern) un enfocament adreçat al reforç exclusiu de les mecàniques, prescindint de la comprensió. Ens diuen que l'important és el saber fer, no el saber. És això un exemple de respecte als alumnes? És cabdal ajudar-los a anar agafant confiança i consciència de les pròpies capacitats matemàtiques. Tothom pot, en un grau o un altre, fer matemàtica. La tria i la gestió de les activitats (acció 5) té una gran importància en l'assoliment d'aquesta autoconfiança. Però entre els aspectes de gestió n'hi ha un que, per la seva importància, mereix una atenció especial: el tractament de l'error... i de l'èxit!

a) Gestionar constructivament l'error

En una situació d'aprenentatge, l'error ha de ser un material de construcció, cal treure-li el caràcter devaluador que sol acompanyar-lo. Adaptant una idea d'Oskar Cymerman, podríem dir: «Esperem els errors, acollim els errors, respectem els errors, analitzem els errors, corregim els errors i aprenem dels errors».¹¹ Si només ens dediquem a encadenar constatacions

11. Adaptat d'un pòster d'Oskar Cymerman: <https://ja.cat/PFZeL>.

negatives d'errors, hi haurà alumnes que entraran en una espiral de desconfiança respecte de les seves possibilitats matemàtiques i acabaran dient la massa coneguda frase «jo no serveixo per a les matemàtiques». Com a societat, no ens ho podem permetre. Suggestim posar atenció en els mots: potser hauríem d'emprar amb més cura la paraula «error» i de donar més joc a la paraula «errada». N'hi ha prou amb consultar el diccionari de l'Institut d'Estudis Catalans per veure que la diferència és evident:

Error

1 1 Acció d'allunyar-se del ver, del just.[...]

1 2 Concepte, opinió, doctrina, que no està conforme a la veritat. [...]

2 1 Diferència entre un valor estimat d'una quantitat o d'una expressió matemàtica i el seu valor exacte.

Errada

Acció d'errar o equivocar-se; l'efecte. [...]

b) Ser proveïdors d'èxits

Res no és més motivador que l'èxit, per petit que sigui. En el desè punt del seu decàleg (1955),¹² Pere Puig Adam escrivia:«X. Procurar a qualsevol alumne èxits que evitin el seu desànim». Més de seixanta-cinc anys després, en diverses ocasions hem sentit a dir Charlie Gilderdale (Universitat de Cambridge) que «en una classe de matemàtiques hi ha molts camins per a què els alumnes tinguin oportunitats d'èxit». Estem convençuts que mestres i professors hem de ser proveïdors d'èxits per als nostres alumnes, amb reptes progressius ben ajustats, perquè requereixen cert esforç, però que siguin assolibles. És el millor camí per anar aportant confiança sobre les possibilitats de cadascú en l'àmbit de les matemàtiques i per aconseguir una major implicació en el seu aprenentatge.

7,4. Sumar (DO-AE)

Potser sorprèn trobar un decimal encapçalant el número d'aquesta acció. És una petita llicència que ens permetem per indicar que l'acció no està només en mans dels nostres actors principals fins ara: docents, Administració i universitat. Ara necessitem que s'hi afegixin altres estaments del que podríem anomenar la societat general i que, amb ànim de concretar, podem particularitzar en les famílies, els mitjans de comunicació i la comunitat matemàtica (més enllà de l'educativa). Cal canviar no només la imatge social que es té de les matemàtiques, sinó la imatge tradicional del que és el seu ensenyament-aprenentatge: el *què* i el *com*. En aquesta línia, també des dels centres tenim un grau de responsabilitat en el canvi sobre aquesta percepció encarcarada. Podem ajudar a visibilitzar que les matemàtiques són molt més que «mecanismes misteriosos només aptes per a una selecta part de la població», fent divulgació amb petites exposicions, presentacions o vídeos del treball de l'alumnat. Les revistes o blogs dels centres poden ser també un bon vehicle de popularització. Per altra banda, es pot explicar a les famílies el projecte educatiu matemàtic del centre per a l'àmbit de les matemàtiques. Potser així podrem esborrar el record personal que pares i mares puguin tenir dels models d'ensenyament més tradicionals d'aquesta àrea.

12. Puig Adam, P. (1960). *La matemàtica y su enseñanza actual*. Madrid: Ministerio de Educación Nacional.

Quant a l'Administració, hi ha un deure pendent clar: crear un espai web d'informació i suport a les famílies, basat en els enfocaments i les maneres de fer actuals en educació matemàtica.

4. Cloenda

En aquest tancament de l'article ens agradaria recordar les paraules de l'enyorat periodista Joan Barril (1952-2014):¹³

[...] és curiosa la normalitat amb què s'admet que els nens de totes les edats manifestin el bloqueig mental a les matemàtiques [...]. Jo també era d'aquests. I l'edat m'ha portat a creure que els números són menys traïdors que les paraules. M'alimento d'aquestes però són ells els que em tranquil·litzen. Les matemàtiques ens permeten la comprensió d'allò que els sentits ni sospiten. Les matemàtiques són el verdader idioma universal que salta continents i que unifica el saber de segles [...]. Les matemàtiques són l'eina que ens permet veure el que ni tan sols intuïm. Es mereixen un plus de prestigi. La vergonya i el dolor de l'analfabet van més enllà de la lectura.

Ens engresquem¹⁴ a continuar amb força el camí de millora de la nostra educació matemàtica? Tothom, des de la seva escola, des de la seva aula, des de la seva responsabilitat, des de la seva família, pot aportar-hi el seu esforç i la seva il·lusió. Hi ha una frase, atribuïda a Eduardo Galeano, amb la qual ens podem identificar: «Mucha gente pequeña, en lugares pequeños, haciendo cosas pequeñas, puede cambiar el mundo».

ens engresquem?

$$e \times e = e^2 \approx 7,4$$

13. Barril, Joan, «La gran eina». *La Vanguardia* (17/9/2004).

14. Encara que no sempre és bo revelar els petits jocs amagats en un text, ens agradaria explicar aquest. Mentre preparàvem la xerrada en què es basa l'article, Laura Morera ens va fer observar que $e^2 \approx 7,4$, el nostre nombre d'accions. La conferència acabava amb una petita animació on les dues lletres e que encapçalaven les paraules «Ens engresquem?» es transformaven en la igualtat esmentada.